

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

1.	Кафедра	Математики, физики и информационных технологий
2.	Направление подготовки	44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
3.	Направленность (профили)	Математика. Физика
4.	Дисциплина (модуль)	Б1.В.01.01 Практикум решения школьных задач по математике
5.	Форма обучения	очная
6.	Год набора	2022

I. Методические рекомендации

1.1 Методические рекомендации по организации работы студентов во время проведения лекционных занятий

- В ходе лекций преподаватель излагает и разъясняет основные, наиболее сложные понятия темы, а также связанные с ней теоретические и практические проблемы, дает рекомендации для практического занятия и указания для выполнения самостоятельной работы.
- В ходе лекционных занятий обучающемуся необходимо вести конспектирование учебного материала. Обращать внимание на категории, формулировки, раскрывающие содержание изучаемой дисциплины, научные выводы и практические рекомендации, положительный опыт в ораторском искусстве.
- Желательно оставить в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки, подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений. Рекомендуется активно задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций.

1.2 Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

- На практическом занятии студенты решают задачи под руководством преподавателя. Семинар проводится по узловым и наиболее сложным вопросам (темам, разделам) учебной программы.
- Практические занятия посвящены изучению наиболее важных тем учебной дисциплины. Они служат для закрепления изученного материала, развития умений и навыков подготовки докладов, сообщений, приобретения опыта устных публичных выступлений, ведения дискуссии, аргументации и защиты выдвигаемых положений, а также для контроля преподавателем степени подготовленности студентов по изучаемой дисциплине.
- В ходе подготовки к практическим занятиям следует изучить основную и дополнительную литературу, учесть рекомендации преподавателя и требования рабочей программы.
- Можно подготовить свой конспект ответов по рассматриваемой тематике, подготовить тезисы для выступлений по всем учебным вопросам, выносимым на занятие. Следует продумать примеры с целью обеспечения тесной связи изучаемой теории с реальной практикой. Можно дополнить список рекомендованной литературы современными источниками, не представленными в списке рекомендованной литературы.

1.3 Методические рекомендации к самостоятельной работе

- Самостоятельная работа – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).
- Самостоятельная работа студентов (далее – СРС) в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. СРС играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения. Обучение в ВУЗе включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса

обучения и процесса самообучения. Поэтому СРС должна стать эффективной и целенаправленной работой студента.

- К современному специалисту общество предъявляет достаточно широкий перечень требований, среди которых немаловажное значение имеет наличие у выпускников определенных способностей и умения самостоятельно добывать знания из различных источников, систематизировать полученную информацию, давать оценку конкретной ситуации. Формирование такого умения происходит в течение всего периода обучения через участие студентов в практических занятиях, выполнение контрольных заданий и тестов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ. При этом СРС играет решающую роль в ходе всего учебного процесса.
- В процессе самостоятельной работы студент приобретает навыки самоорганизации, самоконтроля, самоуправления, саморефлексии и становится активным самостоятельным субъектом учебной деятельности.
- Формы самостоятельной работы студентов разнообразны. Они включают в себя:
 - изучение учебной, научной и методической литературы, материалов периодических изданий с привлечением электронных средств официальной, статистической, периодической и научной информации;
 - подготовку докладов и рефератов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ;
 - участие в работе студенческих конференций, комплексных научных исследованиях.
- Самостоятельная работа приобщает студентов к научному творчеству, поиску и решению актуальных современных проблем.
- Основной формой самостоятельной работы студента является изучение конспекта лекций, их дополнение, рекомендованной литературы, активное участие на практических и семинарских занятиях.

Чтение учебника

- Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего, производя на бумаге все вычисления (в том числе и те, которые ради краткости опущены в учебнике) и выполняя имеющиеся в учебнике чертежи.
- Особое внимание следует обращать на определение основных понятий. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно.
- Необходимо помнить, что каждая теорема состоит из предположений и утверждения. Все предположения должны обязательно использоваться в доказательстве. Нужно добиваться точного представления о том, в каком месте доказательства использовано каждое предположение теоремы. Полезно составлять схемы доказательств сложных теорем. Правильному пониманию многих теорем помогает разбор примеров математических объектов, обладающих и не обладающих свойствами, указанными в предположениях и утверждениях теорем.
- При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется вписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т. д. На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделенные студентом для получения письменной или устной консультации преподавателя.
- Письменное оформление работы студента имеет исключительно важное значение. Записи в конспекте должны быть сделаны чисто, аккуратно и расположены в определенном порядке. Хорошее внешнее оформление конспекта по изученному материалу не только приучит студента к необходимому в работе порядку, но и позволит ему избежать многочисленных ошибок, которые происходят из-за небрежных, беспорядочных записей.
- Выводы, полученные в виде формул, рекомендуется в конспекте подчеркивать или обводить рамкой, чтобы при перечитывании конспекта они выделялись и лучше запоминались. Опыт показывает, что многим студентам помогает в работе составление листа, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы курса. Такой лист не только помогает запомнить формулы, но и может служить постоянным справочником для студента.

Самопроверка

- После изучения определенной темы по учебнику и решения достаточного количества соответствующих задач студенту рекомендуется воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки и доказательства теорем. Вопросы для самопроверки, приведенные в настоящем пособии, даны с целью помочь студенту в повторении, закреплении и проверке прочности усвоения изученного материала. В случае необходимости надо еще раз внимательно разобраться в материале учебника, решить ряд задач.
- Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный раздел.

1.4 Проведение занятий в интерактивной форме

- Интерактивное обучение представляет собой способ познания, осуществляемый в формах совместной деятельности обучающихся, т.е. все участники образовательного процесса взаимодействуют друг с другом, совместно решают поставленные проблемы, моделируют ситуации, обмениваются информацией, оценивают действие коллег и свое собственное поведение, погружаются в реальную атмосферу делового сотрудничества по разрешению проблем.
- Интерактивная форма обучения реализуется в виде коллективных решений творческих задач.
- Коллективные решения творческих задач. Под творческими заданиями понимаются такие учебные задания, которые требуют от обучающихся не простого воспроизводства информации, а творчества, поскольку задания содержат больший или меньший элемент неизвестности и имеют несколько подходов, несколько методов решения.

1.5 Методические рекомендации по решению задач, в том числе дополнительных

- Важным критерием усвоения теории является умение решать задачи на пройденный материал.
- При решении задач нужно обосновать каждый этап решения исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения, то он должен сравнить их и выбрать из них самый лучший. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения.
- Решения задач и примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями. Если чертеж требует особо тщательного выполнения (например, при графической проверке решения, полученного путем вычислений), то следует пользоваться линейкой, транспортиром, лекалом и указывать масштаб.
- Решение каждой задачи должно доводиться до ответа, требуемого условием, и по возможности в общем виде с выводом формулы. Затем в полученную формулу подставляют числовые значения.
- В промежуточных вычислениях не следует вводить приближенные значения корней, числа π и т. п.
- Полученный ответ следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи. Если, например, решалась задача с конкретным физическим или геометрическим содержанием, то полезно, прежде всего, проверить размерность полученного ответа. Полезно также, если возможно, решить задачу несколькими способами и сравнить полученные результаты.
- Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.
- Перед решением задачи должно быть полностью приведено ее условие. Само решение следует сопровождать необходимыми расчетами и пояснениями с указанием применяемых формул, анализом и выводами.
- Работа должна быть оформлена аккуратно, написана разборчиво без помарок, зачеркиваний и сокращений слов.

1.6 Методические указания по подготовке к решению кейсов – практических ситуаций

- Кейс (в переводе с англ. – случай) представляет собой проблемную ситуацию, предлагаемую студентам в качестве задачи для анализа и поиска решения. Обычно кейс содержит схематическое словесное описание ситуации, статистические данные, а также мнения и суждения о ситуациях, которые трудно предсказать или измерить. Кейс, охватывает такие виды речевой деятельности как чтение, говорение и письмо.
- Кейсы наглядно демонстрируют, как на практике применяется теоретический материал. Данный материал необходим для обсуждения предлагаемых тем, направленных на развитие навыков общения и повышения профессиональной компетенции. Зачастую в кейсах нет ясного решения проблемы и достаточного количества информации.
- Анализ кейса должен осуществляться в определенной последовательности:
 - Выделение проблемы.
 - Поиск фактов по данной проблеме.
 - Рассмотрение альтернативных решений.
 - Выбор обоснованного решения.

1.7 Методические рекомендации по выполнению домашних и индивидуальных заданий

- Домашние задания по курсу выполняются обучающимися самостоятельно в отдельной тетради или в тетради для практических занятий.
- Домашние задания ориентированы на закрепление теоретического материала, изученного в ходе лекционного занятия и отработанного на практических занятиях по каждой теме курса.
- При выполнении домашнего задания обучающийся должен повторить теоретический материал лекции по данной теме; разобрать задания, выполненные на практическом занятии; записать условие задания

в тетрадь; полно и с обоснованием действий выполнить решение заданий; при необходимости привести необходимые уточнения (формулы, теоремы, утверждения), на основе которых проводилось решение; записать ответ или вывод.

- Все индивидуальные задания необходимо защитить в устной форме, ответив на вопросы преподавателя по выполнению заданий и обоснованию приведенного решения.

1.8 Методические рекомендации по выполнению контрольных работ

- Контрольные работы по данной дисциплине выполняются в отдельных тетрадях для контрольных работ или на отдельных листах, которых хранятся у преподавателя; в них же обучающийся выполняет работу над допущенными ошибками в случае неудовлетворительного выполнения контрольной работы или дополнительное задание для допуска к пересдаче контрольной работы.
- Контрольная работа считается зачтенной, если правильно выполнено не менее 60% заданий.
- Задания контрольной работы выполняются аккуратно, последовательно, обоснование решения и ответ обязательны в каждом задании.
- При написании работы можно использовать черновик.
- При выполнении контрольных работ не допускается использование мобильных устройств, гаджетов, калькуляторов, учебной литературы.

1.9 Методические рекомендации по подготовке к сдаче зачета

- Зачет осуществляется в рамках завершения изучения дисциплины и позволяет определить качество усвоения изученного материала, а также степень сформированности компетенций.
- Студенты обязаны сдавать зачет в строгом соответствии с утвержденными учебными планами, разработанными согласно образовательным стандартам высшего образования.
- По данной дисциплине зачет принимается по практической части курса. Задания, предлагаемые на зачете, соответствуют оценочным средствам для промежуточной аттестации обучающихся по предмету.
- Студент обязан не только представить правильно выполненные задания, но и защитить свое решение.
- Преподавателю предоставляется право задавать студентам вопросы по решению заданий практической части с целью выявления глубины понимания изученного материала и степени самостоятельности выполнения заданий.
- При явке на зачет студенты обязаны иметь при себе зачетную книжку, которую они предъявляют преподавателю в начале зачета.
- Рекомендуется при подготовке к зачету опираться на следующий план:
 1. Повторить теоретическую часть курса.
 2. После работы над теорией необходимо ответить на вопросы для самоконтроля.
 3. Повторить методы, способы и приемы решения задач по всем темам курса, опираясь на задания, которые решались на практических занятиях и предлагались для самостоятельной работы.
 4. Решить типовые задания по данной теме.

II. Планы практических занятий

Тема 1. Модуль числа и его свойства. Линейные уравнения и неравенства с модулем. Системы линейных уравнений и неравенств с модулем

План:

1. Определение модуля числа.
2. Свойства модуля.
3. Типология задач по основным содержательным линиям школьного курса математики, связанных с модулем (основание типологии – требование задачи).
4. Примеры методических ситуаций при изучении данной темы.
5. Аналитические методы решения алгебраических уравнений, содержащих неизвестное под знаком модуля. Иллюстрация применения выделенных методов.
6. Линейные уравнения с модулем, методика их решения.
7. Методика решения неравенств с модулем.
8. Системы линейных уравнений с модулем.
9. Системы линейных неравенств с модулем.

Литература: [3, с. 56-122, с. 272-279]; [4, с. 17-75]; [5, с. 257-266].

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение модуля числа.
2. Перечислите свойства модуля.

3. Какие теоремы о равносильности уравнений применяются при решении уравнений с модулями?
4. В чем суть графического метода решения задач с модулем?
5. Приведите типологию задач по основным содержательным линиям школьного курса математики, связанных с модулем.
6. Как избавиться от модуля в алгебраических уравнениях и неравенствах?
7. На каких этапах обучения математике вводится определение модуля?
8. В чем отличие этих определений?
9. Сформулируйте свойства модуля.
10. Какова, на ваш взгляд, причина рассмотрения уравнений и неравенств с модулем в теме «Неравенства» (по учебнику Ш.А. Алимова и др. «Алгебра-8»)?
11. Опишите математическим языком положение точки x на координатной прямой, если $2 < |x - 4| < 3$.
12. Перечислите способы решения линейных уравнений с модулем.
13. Какова методика решения линейных уравнений с модулем.
14. В чем суть методики решения неравенств с модулем?
15. Способы решения систем линейных уравнений с модулем.

Пример кейс-задания для коллективного решения:

Задача 1. Решить уравнение: $x^2 + 6|x| + 5 = 0$.

I подзадача. Решить уравнение аналитическим методом.

II подзадача. Решить уравнение геометрическим методом.

III подзадача. Выявить математическую основу решения уравнения этими способами.

IV подзадача. Выявить математическую основу решения уравнения $|2 - |1 - |x|| = 1$ этими способами.

Задача 2. Дано уравнение $|2,1x - 1,9| = 0,5$.

I подзадача. В соответствии с теорией, изложенной в теме «Неравенства» в действующих учебниках по алгебре для 8 класса приведите способы решения данного уравнения.

II подзадача. Каковы математические основы каждого из приведенных способов?

III подзадача. Выполните те же задания для неравенства $|1 + x| \leq 0,3$.

Задания для самостоятельной работы:

1. На основе анализа программ и школьных учебников по курсу математики 5-6 классов, алгебры, алгебры и начал анализа выделите:
 - этапы обучения математике, на которых вводится определение модуля;
 - суть определений, их математические основы;
 - свойства модуля, вводимые на протяжении обучения математике.
2. Выполните типологию задач по основным содержательным линиям школьного курса математики, связанных с модулем (основание типологии – требование задачи).
3. Выделите аналитические методы решения алгебраических уравнений, содержащих неизвестное под знаком модуля. На конкретном наборе задач дайте иллюстрацию применения выделенных методов.
4. Выделите аналитические методы решения алгебраических неравенств, содержащих неизвестное под знаком модуля. На конкретном наборе задач дайте иллюстрацию применения выделенных методов.
5. Выделите элементы теории преобразования графиков функций, содержащих аргумент под знаком модуля. Разработайте методику введения теории (на примере одного из преобразований). Приведите примеры задач, иллюстрирующих применение введенной теории.
6. Для каких значений a выполняется равенство $|2a - 3| = 3 - 2a$?
7. Докажите неравенство $a^2 - 4a + 5 \geq 2|a - 2|$.
8. Решить неравенство: $|x - 2| + |3 - x| > 2 + x$.
9. Решить уравнение: $||x - 1| + 2| - 1| + 1| = 2$.
10. Решить неравенство: $|x + 2| + |x - 3| > 5$.
11. Решить неравенство: $|1 - 3x| - |x + 2| \leq 2$.
12. Решить уравнение: $2|x + 6| - |x| - |x - 6| = 18$.

Тема 2. Квадратные и высших степеней уравнения и неравенства с модулем

План:

1. Квадратные уравнения и неравенства с модулем.

- Уравнения и неравенства высших степеней с модулем.
- Иррациональные уравнения с модулем, методика их решения.
- Преобразования графиков функций, содержащих аргумент под знаком модуля. Методика введения теории (на примере одного из преобразований).

Литература: [3, с. 298-299]; [5, с. 98-121].

Вопросы для самоконтроля:

- Какова методика решения квадратных уравнений и неравенств с модулем?
- Каковы методика решения уравнений и неравенств высших степеней с модулем?
- Покажите преобразования графиков функций, содержащих аргумент под знаком модуля.
- Назовите преобразования графиков функций, содержащих аргумент под знаком модуля.

Пример кейс-задания для коллективного решения:

Задача. Предложите и обоснуйте методику решения уравнений.

I подзадача. $25x^2 - 3|3 - 5x| < 30x - 9$.

II подзадача. $\left((x+1)^{-1} - (x+6)^{-1} \right)^2 \leq \frac{|x^2 - 10x|}{(x^2 + 7x + 6)^2}$.

III подзадача. $|3x - 2| \geq |x^2 + 3x + 7|$.

Задания для самостоятельной работы:

- Решить уравнение $|x^2 - x| + |x - a| = 0$ графическим способом.
- Решить неравенство: $\left| 2x^2 + \frac{19}{8}x - \frac{1}{8} \right| \geq 3x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{19}{8}$.
- Решите уравнение $\sqrt{|x^2 - 3x + 2|} = 2x + 1$.
- Изобразите множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $(y - |x - 1|)(y + 2) \geq 0$.
- Постройте график уравнения $x - 3 = y^2 - 4|y|$.
- Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9 \\ (x + 2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

Тема 3. Трансцендентные уравнения и неравенства с модулем

План:

- Показательные и логарифмические уравнения и неравенства с модулем.
- Тригонометрические уравнения и неравенства с модулем.
- Системы показательных и логарифмических уравнений и неравенств с модулем.
- Методика решения заданий второй части ЕГЭ.

Литература: [3, 372-376]; [5, с. 112-145].

Вопросы для самоконтроля:

- Какие уравнения называются Иррациональными уравнениями с модулем?
- В чем суть методов решения уравнений и неравенств с модулем?
- В чем суть решения показательных уравнений с модулем?
- В чем суть решения логарифмических уравнений с модулем?
- Каковы методы решения тригонометрических уравнений с модулем?
- В чем суть решения показательных неравенств с модулем?
- В чем суть решения логарифмических неравенств с модулем?
- Каковы методы решения тригонометрических неравенств с модулем?

Пример кейс-задания для коллективного решения:

Задача. Для каждой из приведенных ниже задач определите место в учебном процессе; определите возможные функции в соответствии с этапом обучения; разработайте вариант методики работы по поиску решения.

I подзадача. Упростите выражение $\frac{a^2 - 4 - |a - 2|}{a^3 + 2a^2 - 5a - 6}$.

II подзадача. Докажите, что для выполнения равенства $\frac{30}{x^2 - 1} - \frac{13}{x^2 + x + 1} = \frac{7 + 18x}{x^3 - 1}$ необходимо, чтобы $|2x - 5| = 13$. Является ли это условие достаточным?

III подзадача. Решите уравнение $\sqrt{x^2 - 9x + 24} - \sqrt{6x^2 - 59x + 149} = |5 - x|$.

Задания для самостоятельной работы:

1. Решите неравенство $|x - 2| + |3 - x| > 2 + x$ и укажите их методические особенности.
2. Решите неравенство $|x^2 - 5x + 6| \geq |x^2 + 4x - 5|$ и укажите методические особенности его решения.
3. Изобразите на координатной плоскости область, задаваемую системой

$$\begin{cases} |x + y| + |x - y| \leq 4, \\ |x| \leq 1, \\ y \geq \sqrt{x^2 - 2x + 1}. \end{cases}$$
4. Решите уравнение $\sqrt{x^2 - 9x + 24} - \sqrt{6x^2 - 59x + 149} = |5 - x|$.

Тема 4. Основные методы решения задач с параметрами**План:**

1. Типы задач с параметрами.
2. Параметр и поиск решений уравнений, неравенств и их систем (ветвление).
3. Аналитический метод решения задач с параметрами.
4. Геометрический метод решения задач с параметрами.
5. Метод решения относительно параметра.

Литература: [1, с. 12-20, 184-252, 441-466]; [2, с. 5-17, 416-497]; [4, с. 70-84]; [5].

Вопросы для самоконтроля:

1. Что такое параметр?
2. Каковы существенные признаки параметра?
3. Какие существуют методы решения линейных и квадратных уравнений и неравенств с параметрами?
4. В чем суть графического метода решения задач с параметрами?
5. Что такое задача с параметром?

Пример кейс-задания для коллективного решения:

Задача. Дано уравнение $|x + 3| + |x - 1| = a$.

I подзадача. При каких значениях параметра уравнение не имеет решений?

II подзадача. При каких значениях параметра уравнение имеет одно решение?

III подзадача. При каких значениях параметра уравнение имеет два решения?

IV подзадача. При каких значениях параметра уравнение имеет бесконечное множество решений?

Задания для самостоятельной работы:

1. Даны два уравнения: $2\sqrt{(6p - 70)x + 5p - 42} = p - 1 - 4x$ и $\left(1 + 2^{\frac{p-11}{p-15}}\right)^x = 28 - 3x$. Значение параметра

$p \neq 15$ выбирается так, что при умножении числа различных корней первого уравнения на число различных корней второго уравнения получается число $0,25(p - 7)$. Решите второе уравнение при каждом значении параметра, выбранном таким образом.

2. Даны два уравнения $\log_3(x\sqrt{p+11}) = 6p - 1 - 12x$ и $x + \frac{2}{x} = \frac{5x^2 + (3p - 1)x + 14}{x(6 - p)}$. Значение

параметра p выбирается так, что $p + 11 > 0$, $p \neq 6$ и число различных корней первого уравнения

равно сумме числа $4 - p$ и числа различных корней второго уравнения. Решите первое уравнение при каждом значении параметра, выбранном таким образом.

Тема 5. Линейные и квадратные уравнения и неравенства с параметрами и их системы

План:

1. Алгоритм решения линейных уравнений с параметром.
2. Решение линейных уравнений с параметром.
3. Решение линейных неравенств с параметром.
4. Параметр и количество решений системы линейных уравнений.
5. Решение систем линейных уравнений с параметром.
6. Решение систем линейных неравенств с параметром.
7. Свойство квадратного трехчлена.
8. Алгоритмическое предписание решения квадратных уравнений с параметром.
9. Применение теоремы Виета при решении квадратных уравнений с параметром.
10. Расположение корней квадратичной функции относительно заданной точки.
11. Задачи, сводящиеся к исследованию расположения корней квадратичной функции.
12. Решение квадратных уравнений с параметром первого типа (для каждого значения параметра найти все решения уравнения).
13. Решение квадратных уравнений второго типа (найти все значения параметра при каждом из которых уравнение удовлетворяет заданным условиям).
14. Решение квадратных неравенств с модулем и параметром.

Литература: [1, с. 20-58, 184-252]; [2, с. 5-49]; [4, с. 37-84]; [5].

Вопросы для самоконтроля:

1. Что такое задача с параметром?
2. Какие неравенства называются неравенствами первой степени с одним неизвестным?
3. Какое неравенство называется линейным неравенством с одним неизвестным, содержащим параметр?
4. Какие существуют методы решения линейных уравнений и неравенств с параметрами?
5. В чем суть графического метода решения задач с параметрами?
6. Что значит исследовать уравнение?
7. В чем суть методов решения рациональных параметрических уравнений высших степеней?
8. Дайте определение квадратного трехчлена.
9. Перечислите свойства квадратного трехчлена.
10. Как влияет знак старшего коэффициента на расположение графика квадратичной функции?
11. Как ведет себя график квадратичной функции при различных комбинациях старшего коэффициента и дискриминанта?
12. Приведите алгоритм решения квадратных уравнений с параметром.
13. Какие неравенства называются неравенствами первой степени с одним неизвестным?
14. В чем суть методов решения систем уравнений и неравенств с параметрами?
15. В чем суть решения квадратных неравенств с параметром первого типа?
16. В чем суть решения квадратных неравенств с параметром второго типа?
17. Перечислите методы решения квадратных неравенств с модулем и параметром?

Пример кейс-задания для коллективного решения:

Задача 1. Определить число решений уравнения $|x + 2| = ax + 1$ в зависимости от значения параметра a .

I подзадача. Решить задачу аналитическим способом.

II подзадача. Решить задачу с использованием координатной плоскости $(x; a)$.

III подзадача. Решить задачу геометрическим способом (поворот прямой).

Задача 2. При каких a все корни уравнения $(x - a)^2 = a$ расположены на отрезке $(-2; 6]$?

I подзадача. При каком условии уравнение имеет действительные корни?

II подзадача. Построить геометрическую модель задачи.

III подзадача. Запишите необходимые условия для корней уравнения.

Задача 3. Приведите алгоритм решения неравенства $k(a) \cdot x > b(a)$.

I подзадача. Решить методом интервалов неравенство $x^2 + 2(a - 1)x + 4 - a - a^2 \geq 0$.

II подзадача. При каких a неравенство $(x - a)(x - 2) \leq 0$ имеет единственное решение?

III подзадача. При каких a неравенство $2x + a > 0$ является следствием неравенства $x + 1 - 3a > 0$?

IV подзадача. Решить неравенство $x^2 + ax + 1 > 0$, рассмотрев все возможные значения параметра a .

V подзадача. Для каких k неравенство $(k-1)x^2 - 2(k+1)x + k - 3 < 0$ выполняется при любом x ?

Задания для самостоятельной работы:

1. При каких значениях параметра a уравнение $x - a = \left| |2x| - 1 \right|$ имеет ровно три корня.
2. При каждом значении параметра a решите уравнение $ax - 6 = 2a - 3x$.
3. Найти все значения параметра a , при каждом из которых число 7 является единственным корнем уравнения $x - 7 = ax - 7a^2$.
4. Решить уравнение $(a^2 - 1)x = a + 1$.
5. Решить неравенство $ax > 1$.
6. Решить неравенство $(m-1)x < 5m$.
7. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $x^2 - 5x + 10 = \frac{a+19}{x+2}$ имеет ровно два корня на отрезке $[-1; 2, 5]$.
8. Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система имеет единственное решение
$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9 \\ (x + 2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$
9. Определить, при каких значениях a оба корня уравнения $x^2 + 2(a-4)x + a^2 + 6a = 0$ положительны.
10. Решить методом интервалов неравенство $-\frac{1}{3}x^2 + 3ax - 6a^2 - 12 \leq 0$.
11. Решить неравенство $\sqrt{x} > 1 - x$ алгебраическим и геометрическим методами
12. При каких a неравенство $3xy - 4x^2 < a(x^2 + y^2)$ имеет решения?
13. При каких a неравенство $\sqrt{1-x^2} > a - x$ имеет решения?
14. При каких значениях a множество решений неравенства $x(x-4) + a^2(a+4) \leq ax(a+1)$ содержит не более четырех целых значений x ?

Тема 6. Аналитические и геометрические приемы решения задач с параметрами

План:

1. Использование графических иллюстраций в задачах с параметрами.
2. Использование ограниченности функций, входящих в левую и правую части уравнений и неравенств.
3. Использование симметрии аналитических выражений.
4. Решение тригонометрических уравнений, неравенств с параметром.
5. Решение логарифмических уравнений, неравенств с параметром.
6. Решение задач на нахождение области определения функции с параметром.

Литература: [1, с. 59-153, 184-441]; [2, с. 49-123, 221-259]; [3, с. 70-84]; [4].

Вопросы для самоконтроля:

1. В чем суть методов решения иррациональных параметрических уравнений и неравенств?
2. В чем суть методов решения трансцендентных параметрических уравнений и неравенств?
3. Перечислите особенности аналитического приема решения задач с параметрами.
4. Перечислите особенности геометрического приема решения задач с параметрами.

Пример кейс-задания для коллективного решения:

Задача. Изучите теоретический материал по интеграции аналитического и геометрического методов решения параметрических уравнений и неравенств.

I подзадача. Найдите все значения параметра k , при которых уравнение $\sin(\sqrt{x} + \sqrt{k-x}) = 0$ имеет семь решений.

II подзадача. Найдите все значения параметра k , при которых уравнение $\cos\sqrt{x} + \cos(\sqrt{k-x}) = 0$ имеет пять решений.

III подзадача. При каких значения параметра k уравнение $|x-2k| + |4x+k| = 27$ имеет единственное решение?

Задания для самостоятельной работы:

1. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых все корни уравнения $a(3x^2 + 5a^2) = x(9a^2 - x^2)$ являются решениями неравенства $\log_{|8x+1|}(6,8x+1,96) \geq 1$.

2. Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство $\frac{(\log_2 x + 3\sqrt{2} \cdot \log_x 2 - 5) - a}{a - (2 \sin \sqrt{x-4} - 3)} \leq 0$

не имеет решений.

3. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$\log_3(ax^3 + a) - 2 \log_3 \sqrt{x+1} = \log_3 x$ имеет хотя бы один действительный корень.